Resolución del Problema Geométrico

Claudia Castro Vergara

- Sobre el plano, se conoce de manera exacta la posición de 3 puntos no colineales P(1), P(2) y P(3). Queremos conocer la posición exacta de otros 203 puntos sobre el plano P(4), P(5), …, P(201), P(202) y P(203), valiéndonos de los datos D(i,j)= Distancia(P(i),P(j)). ¿Cuál es la menor cantidad de datos D(i,j) que es necesario utilizar para determinar de manera exacta la posición de los puntos P(4), P(5), …, P(201), P(202), P(203)? º

Para resolver el problema…

- Modelado como sistema físico idealizado
- Estructuras de barras
  - Puntos fijos
  - Puntos libres
  - Barras

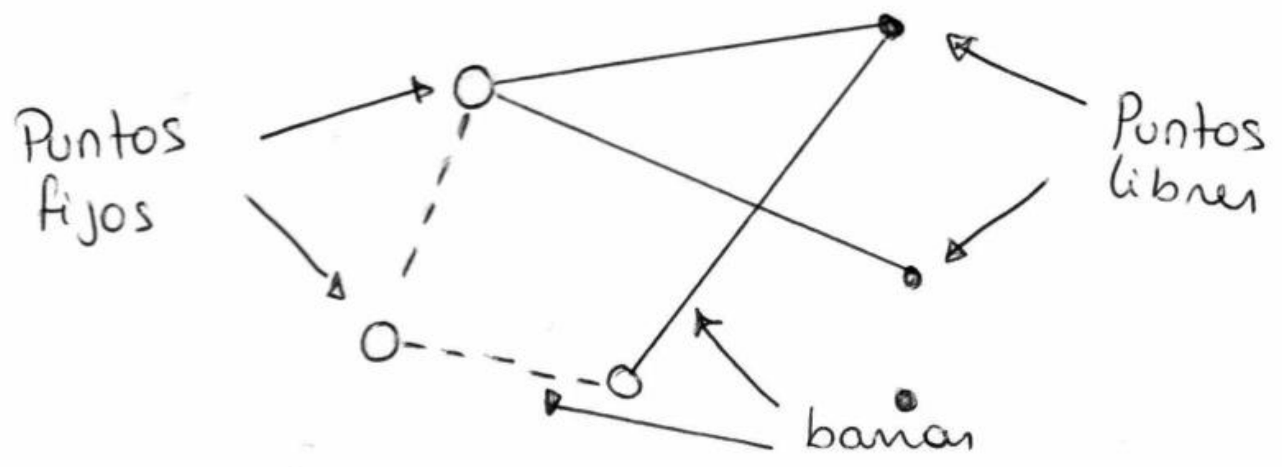

Figura 1: Ejemplo de una estructura de barras.

Tipos de Estructuras

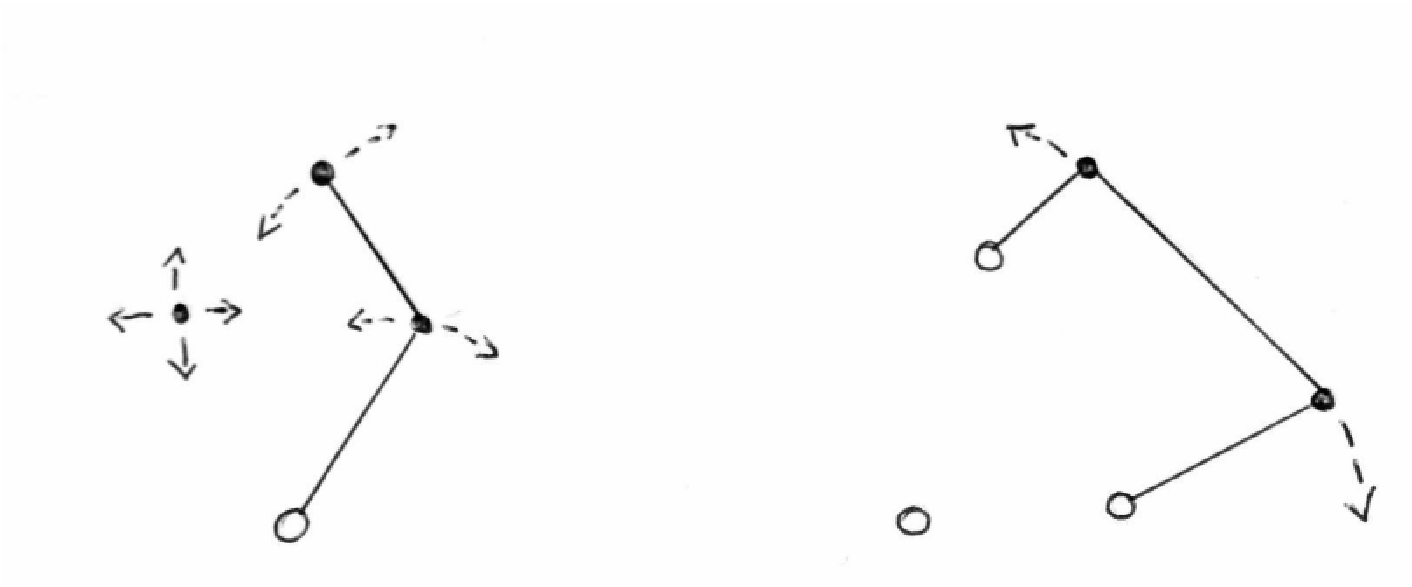

Figura 2: Ejemplos de estructuras flexibles.

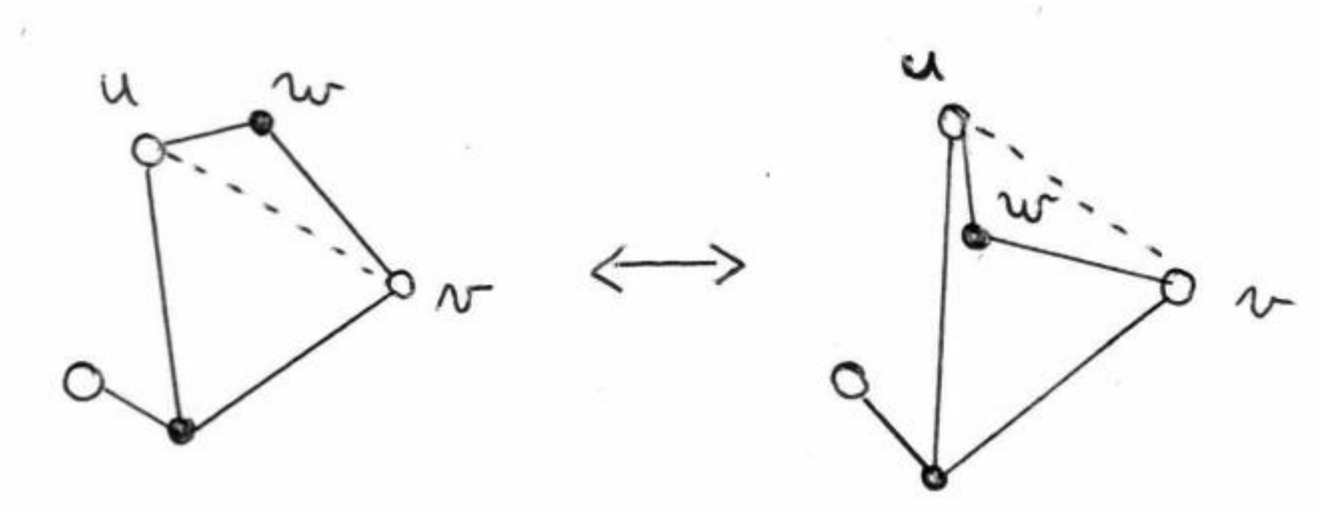

Figura 3: Ejemplos de estructuras rígidas.

Figura 4: Ejemplos de estructuras únicas.

Casos generales y singulares

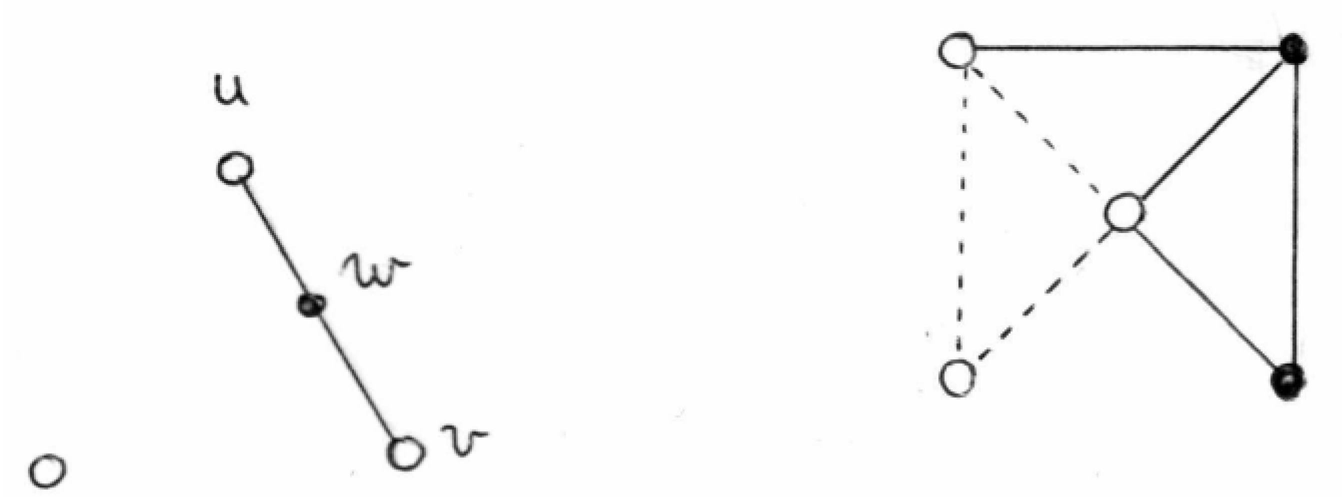

Figura 5: Ejemplos de casos singulares.

Estructuras con n puntos

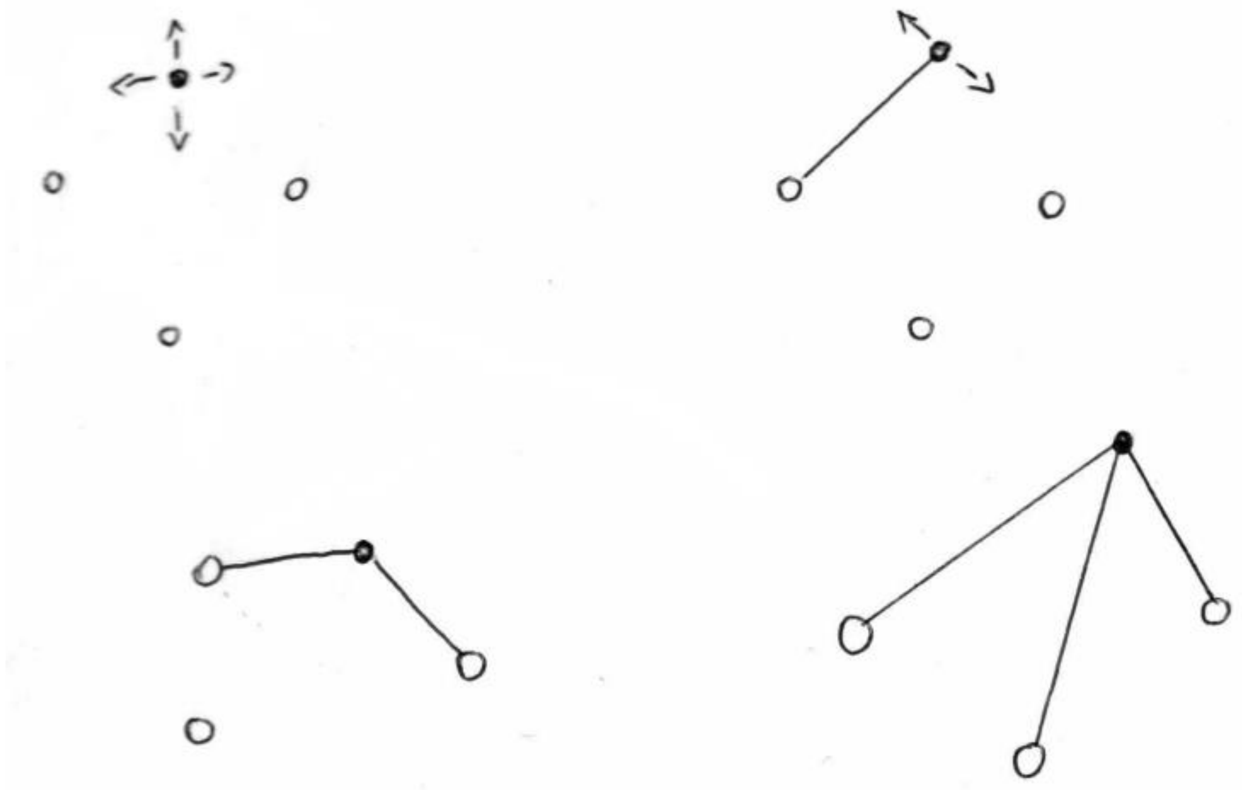

Figura 6: Estructuras con un solo punto libre.

- Para 3 puntos fijos y (n-3) libres, es seguro que podemos formar una estructura única, utilizando un total de 3(n-3) = 3n–9 barras, sin embargo, podemos reducir significativamente el número de barras necesarias.
- Cada uno de los (n-3) puntos libres consta de 2 grados de libertad, por lo tanto, el sistema tiene 2(n-3) = 2n-6 grados de libertad.

2n-7 barras

- Proposición: En general, una estructura de n puntos con 3 puntos fijos y 2n-7 o menos barras es flexible.

2n-6 barras

- Proposición: En general, una estructura de n puntos con 3 puntos fijos, utilizando 2n-6 barras, se puede hacer rígida pero no única.

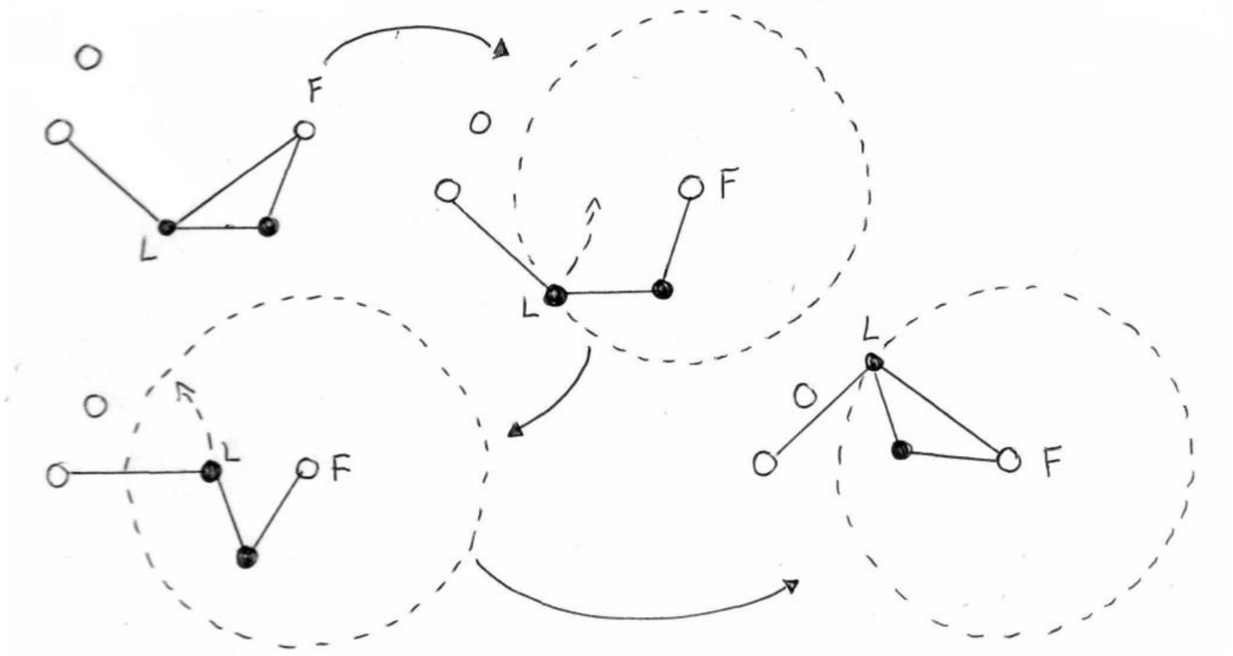

Figura 7: Ejemplo de una estructura rígida pero no única.

2n-5 barras

- Proposición: En general, dados n puntos en el plano con 3 de ellos fijos, 2n-5 barras son suficientes para crear una estructura rígida y única.

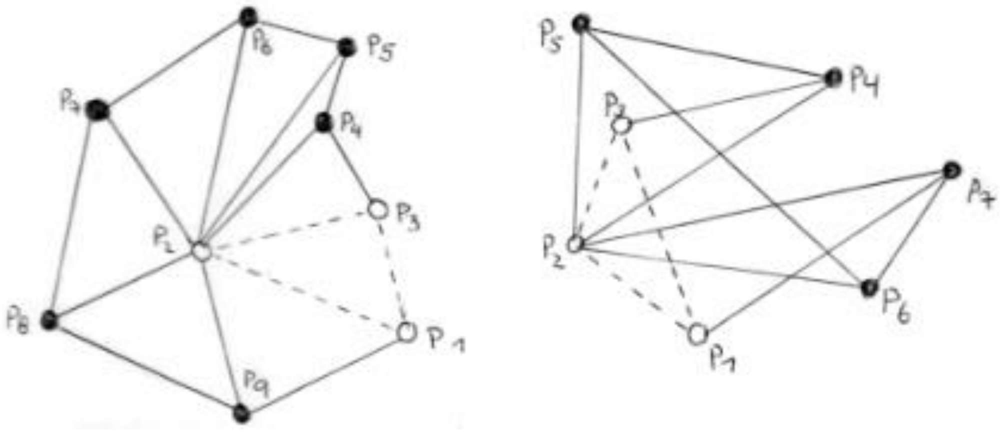

Figura 8: Estructura con forma de rueda.

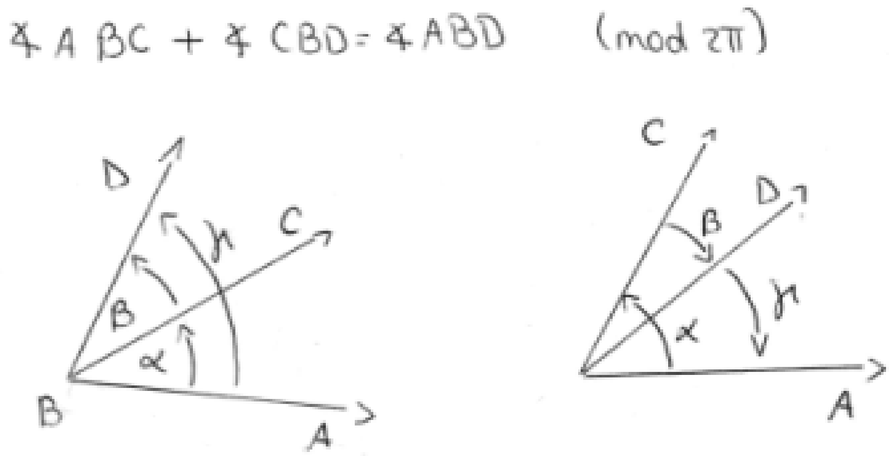

Figura 9: Suma de ángulos.

$\alpha_i = \angle P_i P_2 P_{i+1}$, $i = 3, \ldots, n-1$

$\alpha_n = \angle P_n P_2 P_3$

Aplicando sucesivamente la identidad de sumas de ángulos, se ve que:

$\angle P_3 P_2 P_4 + \angle P_4 P_2 P_5 + \angle P_5 P_2 P_6 + \ldots + \angle P_n P_2 P_1 = \angle P_3 P_2 P_1$,

es decir:

$$\sum_{i=3}^{n} \alpha i = \angle P_3 P_2 P_1$$

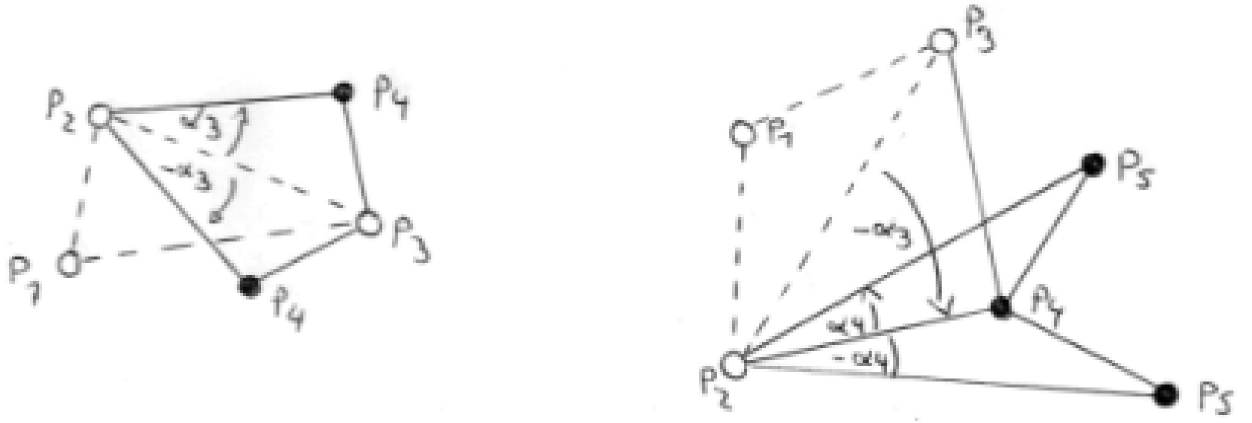

Figura 10: Cada triángulo se puede agregar de dos formas distintas

- Así, cada P_i tendrá 2^{i-3} posibles posiciones.
- Uno de los intentos corresponderá a la configuración original, pero es posible que con otro de los intentos también se pueda hacer encajar las barras, cumpliéndose que:

$$\sum_{i=3}^{n} \bar{\alpha_i} = \angle P_3 P_2 P_1$$

donde uno o más de los $\bar{\alpha}_i$ diferirá de α_i sólo por el signo, y los demás tendrán el valor correcto.

- Suponiendo que se cumple la ecuación anterior para ángulos equivocados, restándola de la ecuación con ángulos correctos, obtenemos:

$$0 = \sum_{i=3}^{n} \alpha i - \sum_{i=3}^{n} \bar{\alpha i}$$

$$= \sum_{i=3}^{n} (\alpha i - \bar{\alpha i})$$

$$= \sum_{j \in J} 2\alpha j$$

donde J es el conjunto de índices para los que $\bar{\alpha}_j = -\alpha_j$
Luego, concluimos que si:

$$\sum_{j \in J} \alpha j = 0$$

para algún conjunto de índices $J \subseteq \{3, \ldots, n\}$, con $J \neq \varnothing$, no tendremos unicidad.

Solución

- Para el problema original de 203 puntos concluimos que, en general, la menor cantidad de distancias necesarias para ubicarlos exactamente es de:

$$2 \times 203 - 5 = 401$$

Generalización a IR^d

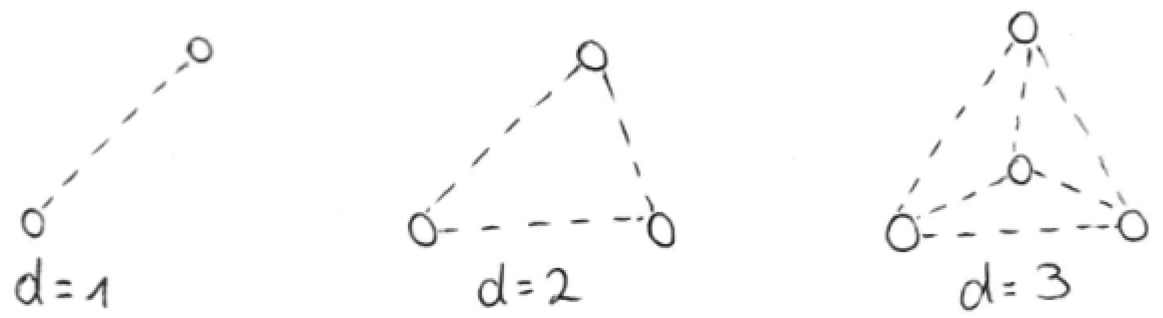

Figura 11: Símplices en dimensiones uno, dos y tres

En general, teniendo n puntos y los primeros d+1 independientemente afines y fijos, y los n-(d+1) = n-d-1 restantes como puntos libres:

->Con ninguna barra, el conjunto de puntos tendrá d(n-d-1) grados de libertad.
->Con d(n-d-1)-1 barras, se pueden formar sólo estructuras flexibles.
->Con d(n-d-1) se pueden formar estructuras rígidas pero no únicas.
->d(n-d-1)+1 barras son suficientes para crear una estructura rígida y única, con los puntos en una posición dada.

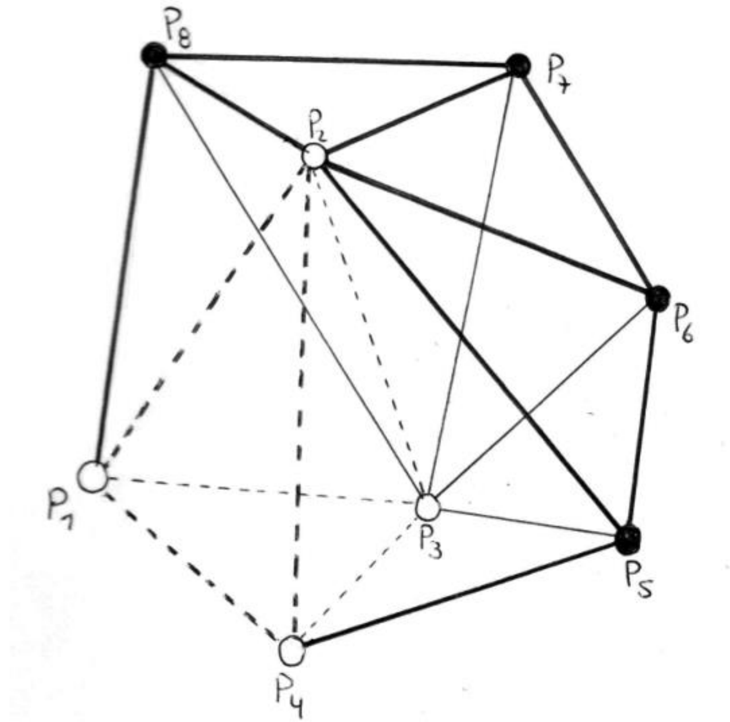

Figura 12: Ejemplo de una estructura de rueda en IR^3.

- **Proposición: En IR^d , si se conoce la posición exacta de d+1 puntos independientemente afines de un total de n puntos, y se quiere conocer la posición exacta de los puntos restantes, la menor cantidad de distancias entre puntos que necesitamos utilizar en general es de d(n-d-1) + 1.**

Referencias

- es.wikipedia.org/wiki/Símplex
- Manuel Díaz Regueiro, “Geometría métrica en un símplex de IR^n , Gaceta Matemática 1º serie Tomo XXXII. Madrid 1981. Pag 73-79